https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj34-01-116
DOI: 10.30888/2663-5712.2025-34-01-116

УДК 519.1

SOME CASES OF CONSTRUCTING BICYCLIC T-FACTORIZATION OF GRAPHS K_n, n=4l+2, l≥1 BY THE METHOD OF PARALLEL TRANSFER OF INTERLOBAL EDGE

ДЕЯКІ ВИПАДКИ ПОБУДОВИ БІЦИКЛІЧНОЇ Т-ФАКТОРИЗАЦІЇ ГРАФІВ K_n, ДЕ n=4l+2 ТА l≥1, МЕТОДОМ ПАРАЛЬНОГО ПЕРЕНЕСЕННЯ МІЖДОЛЬОВОГО РЕБРА

Myronenko O.V. / Мироненко О.В.
c.p.m.s. / к.ф.-м.н.
ORCID:0000-0001-8967-0171
Robert Elworthy Institute of Economics and Technology,
Kropyvnytskyi, Chykalenko 3, 25026
Економіко-технологічний інститут імені Роберта Елворті,
Кропивницький, Чикаленка 3, 25026

Анотація. *В роботі розглядається біциклічна Т-факторизація повного графу Kn, де n=4l+2 та l≥1, а також алгоритму та методу паралельного міждольового перенесення ребер при побудові таких базових компонент біциклічної Т-факторизації.*

Представлено доведення та практичне застосування на прикладах десятивершинних та чотирнадцятивершинних повних графів, які мають вершину з найвищим степенем 5 та 7 відповідно, що запропонований метод, заснований на залишках за модулем та використанні паралельного перенесення міждольового ребра дозволяє, використовуючи низку логічних міркувань та необхідних конструкцій, обчислити всі можливі Т-факторизації для повних графів Kn, де n = 4l+2 та l≥1, з великою кількістю вершин n.

Автор продовжує дослідження існування біциклічної Т-факторизації для графа K_{18} з використанням методу паралельного перенесення міждольового ребра.

Ключові слова: *повний граф, біциклічна Т-факторизація, паралельне перенесення міждольового ребра графу.*

Вступ.

На сьогоднішній день актуальним залишається пошук аналітичних методів та алгоритмів розкладення повних графів на деревні компоненти. Попередні дослідження [1, 2] ознайомлюють з основними поняттями та співвідношеннями, на яких базуються леми, теореми та їх доведення.

Опрацьовано наступні роботи [3-6], матеріали яких використано в дослідженнях біциклічної *Т*-факторизації повного графу K_n, де $n=4l+2$ і $l≥1$, присвячені характеристиці базової компоненти біциклічної *Т*-факторизації, умовам її існування та складанню алгоритму і методу паралельного перенесення міждольового ребра при побудові таких базових компонент біциклічної *Т*-факторизації.

Сформульовано та доведено ряд лем, що стосуються необхідних і достатніх умов *T*-факторизації, а саме - доведено такі леми:

Лема 1. В біциклічній *T*-факторизації *l* ребер в кожній долі графу *T* правильно вписані.

Лема 2. В біциклічній *T*-факторизациї множина різниць $(b_j - a_i)(mod\ k)$ повинна складати повну систему лишків по *mod k*.

У статтях [2, 3] з'ясовано і описано вигляд базової компоненти біциклічної *T*-факторизації:

1. Вона складається з двох долей $A = (1, 2, 3, 4, \ldots, k)$, $B = (k+1, k+2, \ldots, n)$;

2. Підграфи g_A і g_B правильно вписані;

3. Різниця кодів міждолевих ребер складає повну систему лишків по *mod k*.

Таким чином виявлені властивості біциклічної *T*-факторизації, які використано для того, щоб описати вигляд базової компоненти біциклічної *T*-факторизації. Також розглянуто необхідні умови існування довільної біциклічної *T*-факторизації:

а) $n = 4l+2\ (l \geq 1)$, тобто в кожній долі *l* ребер повинні утворювати повний *k*-вершинний граф при послідовних *k-1* циклічних підстановках $\alpha_1 = (1, 2, \ldots, k)$ і $\alpha_2 = (k+1, k+2, \ldots, 2k)$;

б) вказані *l* ребер повинні бути занумеровані спеціальним чином, щоб під дією підстановки α_1 не утворювались ребра-дублікати, а також ребра не повинні утворювати циклів.

Основний текст.

Автором введене поняття паралельного перенесення міждольового ребра.

Означення 1. *Паралельним перенесенням міждольового ребра* називається одночасне збільшення кодів його вершин на постійну величину.

Складено алгоритм побудови всіх базових компонент біциклічної *T*-факторизації для довільних значень $n=4l+2$.

Загальна схема алгоритму побудови:

1. Граф розбивається на дві долі з вершинами $A = (1, 2, 3, 4, \ldots, k)$, $B = (k+1, k+2, \ldots, 2k)$.

2. Будується підграф g_A таким чином, щоб вершина 1 мала максимальний степінь. Якщо це не так, то згідно з Лемою 1, це можна зробити за допомогою підстановки $\alpha_1 = (1, 2, \ldots, k)$.

3. Інші ребра, інцидентні вершинам долі *A*, ідуть у міждолеві ребра і починається перебір їх кінцевих вершин. Перебір ведеться за умови, що різниці кодів складають повну систему лишків по *mod k*.

4. У долі *B* добудовується підграф g_B з умовою неутворення циклу і правильності вписування.

5. Якщо вершина 1 суміжна з будь-якою вершиною долі *B*, то згідно з Лемою 1 можна зробити так, щоб її номер став дорівнювати $k+1$ за допомогою підстановки $\alpha_2 = (k+1, k+2, \ldots, n)$. За цих умов виконується перебір підграфів g_B.

Таким чином, у наведеному переліку робіт автора, та на основі доробку його попередників, розроблено та теоретично обґрунтовано новий метод одержання біциклічної *T*-факторизації повних графів з $n=4l+2$, де $l \geq 1$, який названо *методом паралельного перенесення міждольового ребра*.

Досліджено дію алгоритму побудови всіх базових компонент біциклічної *T*-факторизації для довільних значень $n=4l+2$ та методу паралельного перенесення міждольового ребра на прикладі графу з n=10 для тих дерев, які включають вершину з найвищим степенем k=5, та для яких l=2. Розписані послідовно всі варіанти, що одержуються при побудові підграфів з використанням методу паралельного перенесення міждольового ребра.

Розглянуто всі можливі тривершинні і чотиривершинні підграфи g_A (а також g_B), які можуть виникати в долі *A*. При цьому вершина 1 входить обов'язково в g_A (рисунок 1).

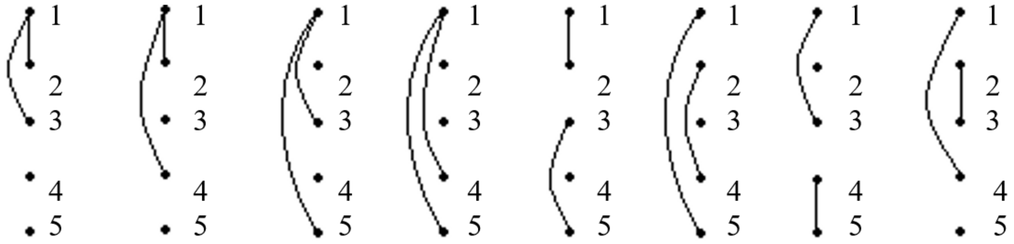

Рисунок 1 - Типи підграфів g_A (g_B) для n=10

Доведено теорему про те, що базова множина вичерпує всі типи можливих підграфів і з'ясовано, що, у підсумку, три базових графи h_1, h_2, h_3, схематичні зображення яких наведені на рисунку 2, дозволяють побудувати біциклічну *T*-факторизацію повного графу K_{10}.

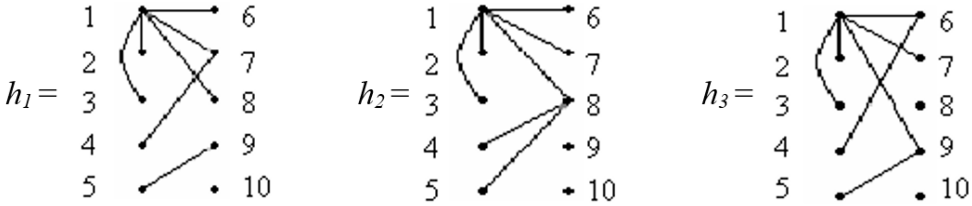

Рисунок 2 - Базові графи, що дозволяють побудувати біциклічну *T*-факторизацію повного графу K_{10}

Показано, що графи T_{15}, T_{17}, T_{19}, T_{61}, T_{62}, T_{66} і T_{78} не допускають біциклічної *T*-факторизації. Тим самим завершено доведення тверджень про існування біциклічних *T*-факторизацій повних графів з кількістю вершин n=10, що мають вершину степеня 5.

Так само, за допомогою алгоритму побудови всіх базових компонент біциклічної *T*-факторизації для довільних значень $n=4l+2$ та методу паралельного перенесення міждольового ребра, виконано перебір усіх графів, які допускають біциклічну *T*-факторизацію повного графу з n=14, і які мають вершину з найвищим степенем 7.

У роботі [6] сформовано повний список 3159 неізоморфних дерев порядку n=14. Множину допустимих дерев, яких рівно 3081 дерево, розбито на 6 класів $T[14,s]$, де s=2, ..., 7. Кожен такий клас складається з дерев порядку 14, для яких найвищий степінь вершини $\Delta(T)=s$.

Автором розглянуто клас $T[14,7]$, який складається з 127 дерев порядку 14 з максимальним степенем вершини $\Delta(T)=7$. В докторській дисертації А. Я. Петренюка [6] сформульовано і доведено ряд тверджень і теорем про існування та неіснування біциклічних *T*-факторизацій для дерев з класу $T[14,7]$:

1) якщо дерево T допускає біциклічну *T*-факторизацію для $n=2k$, то вектор $d(T)=(d_1, d_2, \dots , d_k)$, де d_i – кількість вершин степеня i у дереві T, може бути представлений у вигляді суми двох таких векторів $d_1=(d_1(1), \dots , d_k(1))$ і $d_2=(d_1(2),$

... , $d_k(2)$) з невід'ємними цілими компонентами, що при j=1,2 виконуються співвідношення (1):

$$d_1(j)+ \ldots + d_k(j)=k, \quad (1)$$

$$d_1(j)+ 2\, d_2(j)+\ldots + kd_k(j)=n-1;$$

2) якщо дерево T з класу $T[14,7]$ допускає біциклічну T-факторизацію, то одна з вершинних орбіт групи $\{\alpha\}$ обов'язково включає 6 кінцевих вершин базової компоненти і одну вершину найвищого степеня 7;

3) якщо дерево T з класу $T[14,7]$ допускає біциклічну T-факторизацію, то справедливі співвідношення (2):

$$d_1 \geq m(T)+3 \text{ і } m(T)\geq 3, \quad (2)$$

$$g(T)\leq 3 \text{ і } d_1=6+ m(T)-g(T),$$

де $m(T)$ – кількість кінцевих вершин, суміжних з вершиною найвищого степеня 7,

$g(T)$ – кількість ребер у підграфі, породженому множиною вершин, степені яких не дорівнюють 1 чи 7 (тобто вершин з проміжними степенями);

4) якщо для дерева T з класу $T[14,7]$ виконується нерівність $g(T)>3$, то не існує біциклічної T-факторизації;

5) у класі $T[14,7]$ не менше 17 дерев не допускають біциклічних T-факторизацій;

6) рівно 91 дерево з класу $T[14,7]$ допускає біциклічні T-факторизації.

Подальші дослідження проведено з урахуванням усіх сформульованих умов існування та неіснування біциклічних T-факторизацій для дерев з загальною кількістю вершин n=14, які мають вершину степеня 7, і результатів побудов наведених в [5].

Всі можливі типи підграфів g_A (g_B), що будуються в долі A та в долі B для дерев з кількістю вершин n=14 можна представити так: перший тип включає 3 ребра, інциндентних одній вершині (тобто ребра пов'язують між собою 4 вершини), другий тип – два ребра інциндентних одній вершині і одне окреме ребро (підграф включає 5 таких вершини) і, відповідно, третій тип включає три окремих ребра (6 вершин).

Схематично всі можливі типи підграфів g_A (g_B) можна представити так, як показано на рисунку 3 і вважати їх основними базовими типами підграфів g_A (g_B) для n=14.

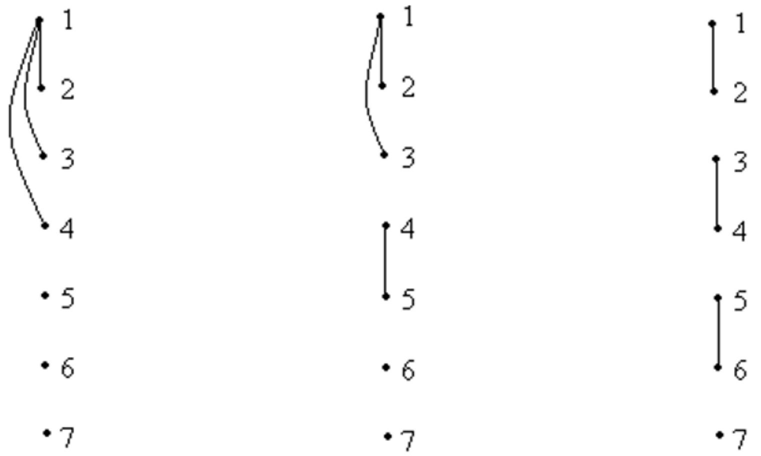

Рисунок 3 - Основні типи підграфів g_A (g_B) для n=14

В ході дослідження автором розпочато доведення існування біциклічної деревної факторизації методом паралельного перенесення міждольового ребра для графа K_{18}, тобто класу T[18,9], який складається з дерев порядку 18 з максимальним степенем вершини Δ(T)=9. Для початку, була виконана спроба побудувати та занумерувати всі можливі графи-дерева з $18=4*4+2$ вершинами, де коренева вершина має степінь 9. Отже, з'ясовано, що кількість ребер такого графу 18 - 1 = 17. Корінь під'єднаний до 9 підграфів-дерев. Нехай розміри цих піддерев – $s_1, s_2, \ldots, s_9$. Тоді $s_1 + s_2 + \ldots + s_9 = 17$ (усі вершини, крім кореня).

Знаходження всіх розбиттів числа 17 на 9 додатних цілих частин відомо як композиції числа 17 на 9 доданків. Кожна така композиція — це варіант розподілу решти вершин між піддеревами. Таким чином, композиції 17 на 9 доданків — це кількість цілих додатних розв'язків лінійного рівняння (3):

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 17 \quad x_i \geq 1. \tag{3}$$

Одержується C_{16}^{8}=12870 варіантів, які помножено на кількість підграфів-дерев. Наступний крок - комбінація цих 9 піддерев у дерево, шляхом під'єднання їх до кореня та занумерування кожного дерева унікально.

Для кожного числа s_i знайдено кількість невпорядкованих дерев $T(s_i)$, перемножено кількість варіантів цих дерев $T(s_1) \cdot T(s_2) \cdot \ldots \cdot T(s_9)$ та просумовано всі допустимі варіанти по всіх композиціях. В результаті знайдено кількість усіх можливих дерев з 18 вершинами, де корінь має степінь 9. З’ясовано, що таких дерев 39 096. Усі ці дерева можна згенерувати через рекурсивну побудову.

Висновки.

Таким чином в статті були розглянуті класи T[10,5] та T[14,7], для яких теоретично доведено та практично показано на прикладах повних графів K_{10} та K_{14}, які мають вершину з найвищим степенем 5 та 7 відповідно, що запропонована методика, основана на лишках по модулю та використанні паралельного перенесення міждольового ребра, дозволяє за допомогою низки логічних міркувань та необхідних побудов, прорахувати всі можливі біциклічні *T*-факторизації для повних графів K_n, де $n = 4l+2$ та $l \geq 1$, з достатньо великою кількістю вершин *n*.

Автором розпочато аналітичне та геометричне дослідження існування біциклічної T-факторизації класу T[18,9] для графа K_{18} методом паралельного перенесення міждольового ребра.

Література:

1. Донець Г.П., Мироненко О.В. (2010). Про необхідні умови Т-факторизації повних графів/О.В. Комбінаторні конфігурації та їх застосування: дев’ятий міжвузівський науково-практичний семінар,16-17квітня: збірка матеріалів,35-39.

2. Донець Г.П., Мироненко О.В. (2011). Побудова базових компонент біциклічної Т-факторизації за допомогою базових графів / О.В. Комбінаторні конфігурації та їх застосування: одиницятий міжвузівський науково-практичний семінар, 15-16 квітня: збірка матеріалів, 49-56.

3. Петренюк Л.П., Петренюк А.Я., Мироненко О.В. (2005). Неіснування Т-факторизацій для деяких класів дерев / О.В. Питання прикладної математики і математичного моделювання: Збірн. наук. праць, 213-219.

4. Мироненко О.В. (2006). Нові результати у типовій задачі існування Т-факторизацій порядку 10 / О.В. Вісник Тернопільського державного технічного університету: наук. журн., 116-125.

5. Петренюк А.Я. (2002). Необхідні умови існування Т-факторизацій / О.В. Доповіді НАНУ, 3, 71–73.

6. Петренюк А.Я. (2002). Екстремальні розклади повних графів: існування, перелік / О.В. К.: Докторська дисертація, 266с.

Abstract. *The work is devoted to the bicyclic T-factorization of the complete graph Kn, where n = 4l+2 and l≥1, and to the algorithm and method of parallel interlobular edge transfer when constructing such basic components of the bicyclic T-factorization.*

It has been theoretically proven and practically shown on the examples of ten-vertex and fourteen-vertex complete graphs, which have a vertex with the highest degree of 5 and 7, respectively, that the proposed method, based on modulo residues and the use of parallel interlobular edge transfer, allows not only using a computer program, but also using a number of logical considerations and necessary constructions, to calculate all possible T-factorizations for complete graphs Kn, where n = 4l+2 and l≥1, with a large number of vertices n.

The author continues the investigation of the existence of a bicyclic T-factorization for the graph K_{18} *using the parallel transfer of an interlobular edge.*

Key words: *complete graph, bicyclic T-factorization, parallel transfer of an interlobular edge of a graph.*

Статтю надіслано: 25.11.2025р.