



УДК 517.9

STUDY OF THE SET OF CONTINUOUS SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENCE-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

ДОСЛІДЖЕННЯ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПОСТІНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Yeromina T.O. / Єр'оміна Т.О.

s.f.-m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.

ORCID: 0000-0001-5765-9875

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",

Kyiv-56, Peremohy (Beresteyskyi) Avenue, 37, 03056

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ-56, Берестейський проспект (Перемоги), 37, 03056

Povarova O.A. / Поварова О.А.

s.f.-m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.

ORCID: 0000-0001-6502-8766

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",

Kyiv-56, Peremohy (Beresteyskyi) Avenue, 37, 03056

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ-56, Берестейський проспект (Перемоги), 37, 03056

Kozak V.I. / Козак В.І.

s.f.-m.s., as.prof. / к.ф.-м.н., доц.

ORCID: 0000-0002-6761-9954

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",

Kyiv-56, Peremohy (Beresteyskyi) Avenue, 37, 03056

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,

Київ-56, Берестейський проспект (Перемоги), 37, 03056

Анотація. Одержано умови існування неперервних розв'язків одного класу систем лінійних різницево-функціональних рівнянь у випадку, коли власні значення основної матриці системи є дійсними та від'ємними і досліджено їх властивості. Проведено аналіз структури множини таких розв'язків, зокрема доведено їх обмеженість та неперервність на нескінченному інтервалі.

Ключові слова: різницево-функціональні рівняння, функціональні рівняння, різницеві рівняння.

Вступ.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(qt) = A(t)x(t) + B(t)x(t+1) + F(t), \quad (1)$$



де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ - дійсні $(n \times n)$ - матриці, $F(t)$ - дійсний вектор розмірності n , q - деяка дійсна стала, яка поєднує в собі властивості різницевих і q - різницевих (функціональних) рівнянь, що були об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–7] та наведену в них літературу). Продовжуючи ці дослідження, в даній статті вивчаються питання існування неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь вигляду (1) з постійними коефіцієнтами, а саме розглядається система однорідних рівнянь вигляду

$$x(qt) = Ax(t) + Bx(t+1), \quad (2)$$

де A , B - дійсні сталі $(n \times n)$ - матриці, q - деяка дійсна стала. При цьому відносно матриці A припустимо, що її власні значення λ_i , $i = 1, \dots, n$ є від'ємними та задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j; |\lambda_i| \neq 0, 1; i, j = 1, \dots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C - деяка стала неособлива $(n \times n)$ - матриця, яка приводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(t+1), \quad (3)$$

Основний текст.

Розглянемо випадок, коли виконуються такі умови:

$$1. |\lambda_i| > 1, i = 1, \dots, n, 0 < q < 1,$$

$$2. \Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1, \text{ де } \tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|, \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T - деяка достатньо велика додатна



стала) розв'язків $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної вектор-функції $\omega(\tau)$, такої що $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Доведення: Покажемо, що система рівнянь (3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (4)$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (4) в (3), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ є розв'язками послідовності систем рівнянь:

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \quad (5_0)$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, \dots, \quad (5_i)$$

то ряд (4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (5₀) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду:

$$y_0(t) = t^v \omega(\tau), \quad (6_0)$$

де $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$, $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \dots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$ - довільні неперервні вектор-функції,

$$t^v = \text{diag}\left(t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \dots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \dots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q^j t + 1), i = 1, 2, \dots \quad (6_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (5_i), $i = 1, 2, \dots$, рівномірно



збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M\Delta^i, \quad i=1,2,\dots \quad (7)$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \leq |t^v| |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} |\omega(\tau)| \leq \frac{1}{t^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} M,$$

де $M = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$, то в силу (6₁), і $\frac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned} |y_1(t)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |y_0(q^j t + 1)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{b} M \frac{1}{(q^j t + 1)^{\left|\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}\right|}} \leq \\ &\leq \frac{M \cdot \tilde{b}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j \leq \frac{M \cdot \tilde{b}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M \cdot \tilde{b}}{\lambda_* - 1} = M\Delta. \end{aligned}$$

Отже, оцінка (7) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (7) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливості для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_i(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |y_i(q^j t + 1)| \leq \tilde{b} M \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \Delta^i \leq \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M\tilde{b} \Delta^i}{\lambda_* - 1} = M\Delta^{i+1}. \quad (9)$$

Отже, ряди (6_i) $i=1,2,\dots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки (7). Із (7) безпосередньо випливає, що ряд (4) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1 - \Delta}. \quad (10)$$



Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(t+1) + F(t), \quad (11)$$

де матриці $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$

задовольняють умови:

$$1. |\lambda_i| > 1, i = 1, \dots, n, 0 < q < 1,$$

$$2. \Delta = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1,$$

$$\text{де } \tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|, \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\};$$

3. всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathfrak{R}$ функціями і $\sup_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Для системи (11) має місце наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються умови 1-3. Тоді система рівнянь (11) має неперервний обмежений при $t \in \mathfrak{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \quad (12)$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathfrak{R}^+$ вектор-функції.

Доведення: Підставляючи (12) в (11), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + F(t). \quad (13)$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, задовольняють системи рівнянь:

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \quad (14_0)$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(t+1), i = 1, 2, \dots \quad (14_i)$$

то ряд (12) буде формальним розв'язком системи рівнянь (11).

Система рівнянь (14₀) має формальний розв'язок у вигляді ряду:



$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} F(q^j t). \quad (15_0)$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (14_i), $i=1,2,\dots$ можна переконатися, що вони також мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), \quad i=1,2,\dots \quad (15_i)$$

Покажемо, що ряди (15_i), $i=1,2,\dots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \Delta^i, \quad i=1,2,\dots \quad (16)$$

Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |F(q^j t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j+1} \tilde{M} \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^j \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_* - 1} = \tilde{M}', \quad (17)$$

то на підставі (15₁), отримуємо

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |\bar{y}_0(q^j t + 1)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j+1} \tilde{b} \tilde{M}' \leq \frac{\tilde{M}' \cdot \tilde{b}}{\lambda_*} \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}' \cdot \tilde{b}}{\lambda_* - 1} = \tilde{M}' \Delta. \quad (18)$$

Отже, оцінка (18) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (18) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливості для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_i(q^j t + 1), \quad i=1,2,\dots, \quad (19)$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda^{-1}|^{j+1} |\tilde{B}| |\bar{y}_i(q^j t + 1)| \leq \tilde{b} \tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*} \right)^{j+1} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}' \tilde{b}}{\lambda_*} \cdot \frac{\Delta^i}{1 - \frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}' \tilde{b} \Delta^i}{\lambda_* - 1} = \tilde{M}' \Delta^{i+1}. \quad (20)$$

Отже, ряди (15_i), $i=1,2,\dots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки (16). Звідси випливає, що ряд (12) рівномірно збігається при всіх $t \in \mathfrak{R}$ до деякої



неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умові

$$|\bar{y}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1-\Delta}. \quad (21)$$

Теорему 2 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (3) у випадку, коли $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \dots, n$, $q > 1$, $t \geq T > 0$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

$$1. |\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n, q > 1,$$

$$2. \Delta = \frac{\tilde{b}}{1-\lambda^*} < 1, \text{ де } \tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|, \lambda^* = \max\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}.$$

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T - деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції $\omega(\tau)$.

Доведення: Покажемо, що система рівнянь (3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \quad (22)$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ - деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (22) в (3), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \quad (23_0)$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), i = 1, 2, \dots \quad (23_i)$$

то ряд (22) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (23₀) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків



вигляду:

$$y_0(t) = t^\nu \omega(\tau), \quad (24_0)$$

де $\omega(\tau+1) = \omega(\tau)$, $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \dots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$ - довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^\nu = \text{diag} \left(t^{\frac{\ln|\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln q}}, \dots, t^{\frac{\ln|\lambda_n|}{\ln q}} \right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (23_i), $i=1,2,\dots$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів:

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} y_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i=1,2,\dots \quad (24_i)$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (24_i), $i=1,2,\dots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, \quad i=1,2,\dots \quad (25)$$

Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq |t^\nu| |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} |\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} M$, де $M = \max_{\tau} |\omega(\tau)|$,

$\lambda_* = \min\{\lambda_i, i=1,\dots,n\}$, то в силу (23₁), і $\frac{\ln \lambda_*}{\ln q} < 0$, отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |\tilde{B}| |y_0(q^{-(j+1)}t + 1)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |\tilde{B}| \left(\frac{1}{q^{j+1}} t + 1 \right)^{\frac{\ln \lambda_*}{\ln q}} M \leq M \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \tilde{b} \leq \frac{M \tilde{b}}{1 - \lambda^*} \leq M \Delta \quad (26)$$

Отже, оцінка (25) має місце при $i=1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (25) доведено уже для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливості для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} y_i(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i=1,2,\dots,$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Lambda|^j |\tilde{B}| |y_i(q^{-(j+1)}t + 1)| \leq M \tilde{b} \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda^*)^j \Delta^i \leq \frac{M \tilde{b} \Delta^i}{1 - \lambda^*} = M \Delta^{i+1}.$$



Отже, ряди (24_i) , $i=1,2,\dots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i=1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки (25). Із (25) безпосередньо випливає, що ряд (22) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умові

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |y_i(t)| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (11), для якого виконуються умови 1-2 теореми 3 і всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \mathbb{R}$ функціями і $\sup_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Тоді аналогічно тому, як була доведена теорема 2, можна довести, що рівняння (13) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна представити у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

в якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i=0,1,\dots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t),$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(t+1), i=1,2,\dots,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j F(q^{-(j+1)}t),$$

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), i=1,2,\dots$$

Зауваження: Виконуючи в (11) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t) \tag{27}$$

отримаємо систему рівнянь (3) відносно вектор-функції $z(t)$. Оскільки для цього рівняння справедлива Теорема 1, то приймаючи до уваги заміну змінних (27), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків



рівняння (11).

У зв'язку із отриманими вище результатами, виникає питання про описання структури множини неперервних розв'язків системи рівнянь (11) у випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{B}(t)$. Розглянемо, наприклад, систему рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B}(t)y(t+1) + \tilde{F}(t), \quad (28)$$

де матриці $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, q - стала, $\tilde{B}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, $\tilde{F}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. Нехай виконуються умови:

1. $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$, $t \geq 0$;

2. $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{b}^*}{\lambda_* - 1} < 1$;

3. всі елементи вектор-функцій $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{B}(t)$ є неперервними й обмеженими функціями при всіх $t \in \mathbb{R}$ і такими, що $\sup_t |\tilde{F}(t)| = \tilde{M}^* < +\infty$, $\sup_t |\tilde{B}(t)| = \tilde{b}^* < +\infty$.

Тоді система рівнянь (28) має неперервний обмежений при $t \in \mathbb{R}$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)$, де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$, - деякі неперервні обмежені при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функції.

Висновки.

У статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків систем лінійних різницево-функціональних рівнянь і розроблено метод їх побудови.

При виконанні умов $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \dots, n$, $0 < q < 1$, та $\tilde{\Delta} = \frac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де

$\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \dots, n\}$, розглянуто однорідну систему

рівнянь, і доведено теорему про існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної



функції $\omega(\tau)$, $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$ $\left(\tau = \frac{\ln t}{\ln q} \right)$. Ці розв'язки представляються у вигляді ряду (4), де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \dots$ – деякі неперервні функції, які є розв'язками послідовності рівнянь (5_i) , $i = 0, 1, \dots$ та задовольняють оцінку (8). Теорему про існування неперервного розв'язку доведено також і для неоднорідного рівняння. Дослідження також проведено і для обереного випадку.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню різницево-функціональних рівнянь.

Література:

1. Agarwal R.P. *Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications*. – 2nd ed. – New York: CRC Press, 2000. – 972 с. DOI: 10.1201/9781420027020.
2. Birkhoff G.D. *General theory of linear difference equations* // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1911. – Т. 12. – С. 243–284.
3. Trjitzinsky W.J. *Analytic theory of linear q-difference equations* // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1933. – Т. 61. – С. 1–38.
4. Мартинюк Д.І. *Лекції з якісної теорії різницевих рівнянь*. – Київ: Наукова думка, 1972. – 248 с.
5. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. *Лінійні неоднорідні різницеві рівняння*. – Москва: Наука, 1986. – 128 с.
6. Пелюх Г.П., Сивак О.А. *Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом* // *Нелінійні коливання*. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 75–95.
7. Пелюх Г.П. *До теорії систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом* // *Доповіді НАН України*. – 2006. – Т. 407, № 5. – С. 600–603.
8. Er'omina T.O. *On the Solutions of Systems of Nonlinear Functional Equations Continuous in $t \in \mathbb{R}$* // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. – 2017. – Т. 222, № 3. – С. 237–254. DOI: 10.1007/s10958-017-3296-5.



Abstract. Conditions for the existence of continuous solutions to a certain class of systems of linear difference-functional equations with constant coefficients are obtained in the case when the eigenvalues of the system's coefficient matrix are real and negative. The structural properties of the set of such solutions are investigated, in particular, their boundedness and continuity on the infinite interval are proved.

Keywords: difference-functional equations, functional equations, difference equations.

Статтю надіслано: 25.07.2025 р.



CONTENTS

Innovative engineering, technology and industry

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-006> 3

TWO-STAGE DYNAMIC TRACKER FOR TRACEABILITY OF THE MOVING OBJECTS

Semko Oleksiy Viktorovich, Vinnichuk Dinys Oleksandrovich

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-019> 19

FOOD ESPUMAS AS A SIGNIFICANT COMPONENT OF MOLECULAR GASTRONOMY

Abramova A.G.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-023> 25

THERMOCHEMICAL FUEL CONVERSION IN MARINE POWER SYSTEMS: MODELING AND EFFICIENCY ANALYSIS

Kosorukov Y. Y.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-030> 30

ENERGY-EFFICIENT TECHNOLOGIES IN FLOATING STORAGE AND REGASIFICATION UNITS (FSRUS)

Nikonchuk S.V.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-045> 39

USE OF ROCK SLURRY IN THE SYNTHESIS OF GEOPOLYMERS: ENVIRONMENTAL AND TECHNOLOGICAL ASPECTS

Skyba G.V.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-048> 48

THE DOMESTIC HEALTHY FOOD INDUSTRY - THE INNOVATIVE WAY TO PROGRESS AND DEVELOPMENT

Simakhina G.O., Naumenko N.V.

Computer science, cybernetics and automatics

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-007> 59

CONCEPTUAL APPROACH TO THE DEVELOPMENT OF UX DESIGN FOR A UNIVERSITY MOBILE APPLICATION: PERSONAS AND USER JOURNEYS

Kutelmakh R.K.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-018> 74

APATHY: HOW YOUTUBE'S ALGORITHMS FOSTER BINGE-WATCHING BEHAVIOUR

Akhmerov A.O.



<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-024> 80

UX DESIGN FOR DIGITAL INCLUSION: HOW TO ENSURE ACCESSIBILITY FOR ALL USERS

Kondratyuk A. S.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-029> 91

OVERVIEW OF FUNDAMENTAL MACHINE LEARNING ALGORITHMS AND THEIR APPLICATIONS

Kiselyov O. V.

Development of transport and transportation systems

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-061> 105

ANALYSIS OF THE CAUSES OF SHIP ACCIDENTS DURING NAVIGATION IN PORT WATERS AND MOORING (PART 1)

Bychkovskyy Y.

Architecture and construction

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-005> 120

THE INFLUENCE OF ARCHITECTURAL STYLES ON FORMATION IN ARCHITECTURAL DESIGN AND FASHION

Tyurikova, O. M., Nesterenko D. A., Bondar O., Lozinska Ya.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-051> 134

EVOLUTION OF ARCHITECTURAL COMPOSITION PRINCIPLES IN SACRED ARCHITECTURE OF UKRAINE: FROM WOODEN CHURCHES TO MODERNIST INTERPRETATIONS

Diachok O., Kolodrubaska O., Verbovetskyi Y., Bilyk M., Myroniuk S.

Physics and mathematics

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-026> 148

LAMB WAVE MODE SEPARATION IN LAMINATED BEAMS

Pysarenko A.M.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-052> 156

LEARNING TO DETECT LPI RADAR SIGNALS: A STUDY OF STRUCTURE IN FREQUENCY MODULATED NOISE WAVEFORMS

Vyplavin P.L., Lukin K.O.

<https://www.sworldjournal.com/index.php/swj/article/view/swj32-01-059> 166

STUDY OF THE SET OF CONTINUOUS SOLUTIONS OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENCE-FUNCTIONAL EQUATIONS WITH

Yeromina T.O., Povarova O.A., Kozak V.I.



Scientific publication

International periodic scientific journal

ScientificWorldJournal

Issue №32

Part 1

July 2025

Indexed in
INDEXCOPERNICUS
high impact factor (ICV: 73)

Articles published in the author's edition

*Academy of Economics named after D.A. Tsenov
Bulgaria jointly with SWorld*

Signed: July 30, 2025

e-mail: editor@sworldjournal.com

site: www.sworldjournal.com



www.sworldjournal.com





www.sworldjournal.com